

A rendre pour le Mercredi 13 Mars 2019

Soient f la fonction numérique de la variable réelle définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

et (u_n) la suite de nombres réels déterminée par :

$$\begin{cases} u_0 = \int_0^1 f(x) dx \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \int_0^1 x^n f(x) dx \end{cases}$$

On note \mathcal{C}_f la représentation graphique de f , relativement à un repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1) Etude de f .

1. La fonction f est bien définie sur \mathbb{R} car $1+x^2 \geq 1$. Et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(-x) = \frac{1}{\sqrt{1+(-x)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = f(x)$$

La fonction f est paire sur \mathbb{R} .

2. La fonction f est dérivable sur $[0, +\infty[$ en tant que composée de fonction dérivable et (en utilisant le fait que $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = (1+x^2)^{-1/2}$),

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) &= -\frac{1}{2} \times 2x \times (1+x^2)^{-3/2} \\ &= \frac{-x}{(1+x^2)^{3/2}} < 0 \end{aligned}$$

La fonction f est décroissante sur $[0, +\infty[$.

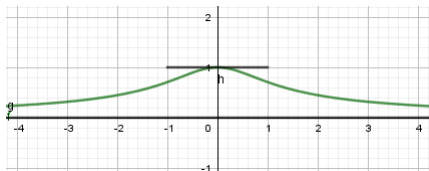
3. On sait que $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1+x^2 = +\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1+x^2} = +\infty$ et ainsi

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = 0$$

4. La fonction f est décroissante et $f(0) = 1$. On a donc $f([0; +\infty[) =]0, 1]$. La fonction étant paire, sa courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. Donc $f(\mathbb{R}) =]0, 1]$. (On peut également récapituler ces résultats dans un tableau de variation)

La fonction f est bornée sur \mathbb{R} .

5. On trace la fonction f (en n'oubliant pas l'asymptote horizontale en l'infini et la tangente horizontale en 0)



6. On sait que

- La fonction f est continue sur $[0; +\infty[$ (car dérivable)
 - La fonction f est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$.
 - On a $f([0; +\infty[) =]0, 1]$
- D'après le théorème de la bijection,

$$\boxed{f \text{ réalise une bijection de } [0, +\infty[\text{ sur }]0, 1].}$$

7. Soit $y \in]0, 1]$. On résout l'équation

$$\begin{aligned} f(x) = y &\iff \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = y \\ &\iff \sqrt{1+x^2} = \frac{1}{y} \\ &\iff 1+x^2 = \frac{1}{y^2} \\ &\iff x^2 = \frac{1}{y^2} - 1 \\ &\iff x = \frac{\sqrt{1-y^2}}{y} \end{aligned}$$

8. $\boxed{\text{La fonction réciproque de } f \text{ est alors } f^{-1} : x \rightarrow \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}.}$

2) Calcul d'aire

On considère la fonction numérique F de la variable réelle x définie par :

$$F(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

Pour tout réel λ strictement positif, on note $\mathcal{A}(\lambda)$ l'aire (exprimée en unité d'aire) du domaine constitué par l'ensemble des points $M(x, y)$ tels que :

$$\lambda \leq x \leq 2\lambda \quad \text{et} \quad 0 \leq y \leq f(x)$$

ainsi

$$\mathcal{A}(\lambda) = \int_{\lambda}^{2\lambda} f(x) dx$$

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Si $x \geq 0$, on a $\sqrt{1+x^2} > 0$ et donc la somme est positive. Si $x < 0$ alors

$$\begin{aligned} 1+x^2 > x^2 &\implies \sqrt{1+x^2} > \sqrt{x^2} \\ &\implies \sqrt{1+x^2} > -x \\ &\implies x + \sqrt{1+x^2} > 0 \end{aligned}$$

Donc, dans tous les cas,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad x + \sqrt{x^2 + 1} > 0}$$

$\boxed{\text{La fonction } F \text{ est donc définie sur } \mathbb{R}.}$

2. La fonction F est dérivable sur \mathbb{R} et

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad F'(x) &= \frac{1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x + \sqrt{x^2+1}} \\ &= \frac{\frac{\sqrt{x^2+1} + x}{\sqrt{x^2+1}}}{x + \sqrt{x^2+1}} \\ &= \frac{x + \sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1} (x + \sqrt{x^2+1})} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = f(x) \end{aligned}$$

La fonction F est donc une primitive de la fonction f .

3. On pourrait montrer que F est impaire en calculant $F(-x)$ mais on peut également exploiter le fait que f est paire et que F est une primitive de f . On a

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt$$

Car la fonction F s'annule en 0. Or la fonction f est paire donc :

$$\begin{aligned} \int_{-x}^x f(t) dt &= 2 \int_0^x f(t) dt \iff \int_{-x}^0 f(t) dt + \int_0^x f(t) dt = 2 \int_0^x f(t) dt \\ &\iff \int_{-x}^0 f(t) dt = \int_0^x f(t) dt \\ &\iff - \int_0^{-x} f(t) dt = \int_0^x f(t) dt \\ &\iff -F(-x) = F(x) \end{aligned}$$

La fonction F est donc impaire.

4. On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} x + \sqrt{x^2+1} = +\infty$ et donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty$$

La fonction étant impaire,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = -\infty$$

5. La fonction F est une primitive de f donc

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\lambda) &= \int_{\lambda}^{2\lambda} f(x) dx \\ &= F(2\lambda) - F(\lambda) \\ &= \ln \left(2\lambda + \sqrt{(2\lambda)^2 + 1} \right) - \ln \left(\lambda + \sqrt{\lambda^2 + 1} \right) \end{aligned}$$

$$\text{On a donc } \mathcal{A}(\lambda) = \ln \left(\frac{2\lambda + \sqrt{4\lambda^2 + 1}}{\lambda + \sqrt{\lambda^2 + 1}} \right).$$

On a

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{2\lambda + \sqrt{4\lambda^2 + 1}}{\lambda + \sqrt{\lambda^2 + 1}}\right) &= \ln\left(\frac{2\lambda + 2\lambda\sqrt{1 + 1/(4\lambda^2)}}{\lambda + \lambda\sqrt{1 + 1/\lambda}}\right) \\ &= \ln\left(\frac{2\lambda(1 + \sqrt{1 + 1/(4\lambda^2)})}{\lambda(1 + \sqrt{1 + 1/\lambda})}\right) \\ &= \ln\left(\frac{2(1 + \sqrt{1 + 1/(4\lambda^2)})}{1 + \sqrt{1 + 1/\lambda}}\right) \end{aligned}$$

Or,

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} 1 + \sqrt{1 + 1/(4\lambda^2)} = 2, \quad \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} 1 + \sqrt{1 + 1/\lambda} = 2$$

Finalement, $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \mathcal{A}(\lambda) = \ln(2)$.

3) Etude de la suite (u_n) .

1. On a

$$u_0 = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$$

D'après la partie précédente,

$u_0 = [F(x)]_0^1 = \ln(1 + \sqrt{1^2 + 1}) - \ln(0 + \sqrt{0^2 + 1}) = \ln(1 + \sqrt{2})$.

On a ensuite

$$u_1 = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx$$

La fonction $x \rightarrow \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ est de la forme $\frac{u'}{2\sqrt{u}}$ avec $u(x) = \sqrt{1+x^2}$. Alors

$$u_1 = \left[\sqrt{1+x^2} \right]_0^1 = \sqrt{1+1^2} - \sqrt{1+0^2}$$

Donc, $u_1 = \sqrt{2} - 1$.

2. On a

$$u_3 = \int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}} dx = \int_0^1 x^2 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx$$

On pose

$$u(x) = x^2 \quad v'(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$u'(x) = 2x \quad v(x) = \sqrt{1+x^2}$$

Les fonctions u et v sont de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, 1]$. Par intégration par parties

$$\begin{aligned} u_3 &= \int_0^1 x^2 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx = \left[x^2 \sqrt{1+x^2} \right]_0^1 - \int_0^1 2x \sqrt{1+x^2} dx \\ &= \sqrt{2} - 0 - \left[\frac{2}{3} (1+x^2)^{3/2} \right]_0^1 \\ &= \sqrt{2} - \frac{2}{3} (2\sqrt{2} - 1) \\ &= \frac{2}{3} - \frac{\sqrt{2}}{3} \end{aligned}$$

3. Pour tout $x \in [0, 1]$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} x^{n+1} \leq x^n &\implies x^{n+1}f(x) \leq x^n f(x) \quad (\text{La fonction } f \text{ est croissante}) \\ &\implies \int_0^1 x^{n+1}f(x)dx \leq \int_0^1 x^n f(x)dx \\ &\implies u_{n+1} \leq u_n \end{aligned}$$

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc décroissante.

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction $x \rightarrow x^n f(x)$ est positive donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \int_0^1 x^n f(x)dx \geq 0$$

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et minorée, elle est donc convergente.

5. Soient $x \in [0, 1]$ et $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned} 1 \geq x^2 \geq 0 &\implies 2 \geq 1 + x^2 \geq 1 \\ &\implies \sqrt{2} \geq \sqrt{1 + x^2} \geq 1 \\ &\implies 0 \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \leq \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} \leq 1 \\ &\implies 0 \leq \frac{x^n}{\sqrt{1 + x^2}} \leq x^n \end{aligned}$$

$$\forall x \in [0, 1], \forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} \leq x^n$$

En prenant l'intégrale,

$$\begin{aligned} 0 \leq \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} \leq x^n &\implies \int_0^1 0dx \leq \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}dx \leq \int_0^1 x^n dx \\ &\implies 0 \leq u_n \leq \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 \\ &\implies 0 \leq u_n \leq \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}$$

6. On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$. D'après le théorème des gendarmes,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0.$$